13 – апта.

Функционалдық қатарлар

Мысал №1. $|x|<1$ болған жағдайда, $1+x+x^2+...+x^n+...$ қатары жинақты. Себебі, бұл қатар кемімелі геометриялық прогрессия ($a_1=1,\quad q=x$) және оның қосындысы $\dfrac{1}{1-x}$. Сонымен, (-1,1) интервалында берілген қатар жинақты және

$$S(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+....$$

$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$ болса, онда $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ - қатардың қалдық мүшесі.

Мысал №2. $\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 2x}{2^2}+...+\dfrac{\cos nx}{n^2}+...$

қатары барлық сан осінде мажорланған екені анық, өйткені, $\forall x\in(-\infty,\infty)\Rightarrow\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2},\quad n=1,2,...,$ ал $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^n}+...$ - қатары жинақты қатар.

Дәрежелік қатарлар

Мысал №3. $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+\dfrac{x^n}{n}+...$ қатарының жинақтылық облысын тап.

$a_n=\dfrac{1}{n}$ болғандықтан, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n=1}{n}=1$ - жинақтылық радиусы. $x=\pm1$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз.

$x=1\Rightarrow 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...$ - гармониялық қатар, жинақсыз болады.

Мысал №4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Дәрежелік қатардың жинақталу аймағын тап.

Шешуі: $c_n=\frac{1}{n}$ болады, онда жинақтылық радиусы $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$;

(–1,1) – жинақтылық интервалы.

$x=-1$ болсын, онда берілген қатар: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ түрінде болады.

Бұл қатар шартты жинақты, себебі $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ жинақсыз және

а) $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$x=1$ болса, берілген қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармониялық қатар және ол жинақсыз қатар. Сонымен, берілген қатар $x\in(-1,1)$ аралығында абсолютті жинақты, $x=-1$ болғанда шартты жинақты.

$x=-1\Rightarrow -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$-таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар, бұл жинақты қатар

Мысал №5. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-2)}$.

Шешуі: $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$, $c_n\neq 0$ егер $n=3,4,...$ болса.

Онда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)}=1$.

Сонымен, $R=1$- жинақтылық радиусы; $(-1,1)-$ жинақтылық интервалы.

Интервалдың шеткі нүктелерінде берілген қатарды жинақтылыққа зерттейік.

$x=-1$ болса:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$$

Бұл қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты қатарымен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n(n-2)}:\frac{1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-2)}=1\neq 0.$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $x=-1$ болғанда қатар абсолютті жинақты.

Егер $x=1$ болса, онда берілген қатар мына түрде болады: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$.

Бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған қатар: $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$ жинақты қатар, ендеше жоғарыдағы таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты.

Сонымен, берілген қатар $x\in[-1,1]$ болғанда абсолютті жинақты.

Тейлор қатары

Мысал №6. $y=e^{x}$ функциясын Маклорен формуласы бойынша жікте және e санын $\varepsilon=10^{-5}$ дәлдікке дейін есепте.

$y=f(x)=e^{x}, f(0)=e^{0}=1\Rightarrow f'(x)=e^{x}, f'(0)=1\Rightarrow \ldots\Rightarrow f^{(n)}(x)=e^{x}, f^{(n)}(0)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x)=e^{x}, f^{(n+1)}(\xi)=f(\Theta x)=e^{\Theta x}\Rightarrow$

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x},\quad 0<\Theta<1$$

$x=1$ болса, $R_n(1)=\dfrac{1}{(n+1)!}e^{\Theta x}<\dfrac{3}{(n+1)!}$. $n=1,2,3,\ldots,7$ үшін: $\dfrac{3}{(n+1)!}>10^{-5}$, ал $n=8$ үшін: $\dfrac{3}{9!}<10^{-5}$ болғандықтан, $n=8$. Сонымен,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}=2.71828.$$

Әрбір элементар функция үшін $(a-R;a+R)$ интервалында Тейлор қатарына жіктелетіндей a және R сандары табылатындығын айта кеткен жөн.

Кейбір функциялардың Тейлор қатарына жіктелуін дәлелдеусіз көрсетеміз:

1. $y = e^x, \quad R = \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

2. $y = \sin x, \quad -\infty < x < \infty$

$$Sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

3. $y = \cos x, \quad -\infty < x < \infty$

$$\cos x = \ldots$$

4. $y = \ln(1+x), \quad -1 < x < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

5. $y = (1+x)^m, \quad m - const, \quad -1 < x < 1$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} x^n + \ldots$$

Е с к е р т у . Көрсетілген жіктеулерді күрделі функциялар үшін де қолдануға болады.

Мысалы:

1. $\ln(1-x) = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots, \qquad -1 < x < 1$

2. $cosx^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$. $(1+x)^m$ жіктелуіндегі $m=-\dfrac{1}{2}$ деп есептейміз және x-тің орнына $(-x^2)$-ты қоямыз. жинақтылық интервалы: $\left|-x^2\right|=\left|x^2<1\Rightarrow-1<x<1\right|$ болады және:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots.$$

4) $y=\arcsin x$. $y'=f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ болғандықтан, $-1<x<1$ үшін:

$$f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+..)dt\Rightarrow$$

$$arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots,\qquad -1<x<1.$$

Бұл қатар $x=\pm 1$ болғанда жинақты екенін көрсетуге болады. Онда $x=1$ болғанда:

$\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}=1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{1}{7}+\ldots$. Бұл π -ді есептеу формуласы.

Алғашқы функциясы элементар функциялар болмайтын интегралдарды кейде қатарлардың көмегімен есептеуге болады.

Мысал №7. $I=\int_0^a e^{-x^2}dx$ интегралын есепте.

Шешуі: $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots,\quad -\infty<x<\infty$, екенін ескеріп, екі жағын да интегралдасақ:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\int_0^a[1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots]dx=(x-\frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots)\Big|_0^a=$$

$$=a-\frac{1}{1!}\cdot\frac{a^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{a^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{a^7}{7}+\ldots).$$

Тейлор қатары, жалпы айтқанда, дәрежелік қатарлар дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу үшін жиі қолданылады.

Мысал №8. Берілген теңдеуінің жалпы шешімін тап:
Шешуі: $y'' = 2xy' + 4y$, $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Шешімді $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ түрінде іздейміз.

Бастапқы шарттарды ескерсек: $a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1.$

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} + \ldots$$

Ары қарай, y, y', y''-терді теңдеуге қойып, x-тің бірдей дәрежелерінің коэффиценттерін теңестірсек:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$3 \cdot 2 \cdot a_3 = 2 + 4 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$4 \cdot 3 \cdot a_4 = 4a_2 + 4a_2 \Rightarrow a_4 = 0$$

....

$$n(n-1)a_n = (n-2) \cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

Ендеше, $a_{2k} = 0, k = 1,2,\ldots$.

$$a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}, \; a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2!}}{6} = \frac{1}{3!}, \ldots, a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}, \ldots$$

Бұдан, дербес шешім

$$y = x + \cdot \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Мысал №9. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциясын $x=1$ аймағындағы Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. Туындыларын табамыз:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ f''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3},\ f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},\ f^{(4)}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5},\ldots$$

$x=1$ болғанда:

$$f(1)=1,\ f'(1)=-1,\ f''(1)=1\cdot 2,\ f'''(1)=-1\cdot 2\cdot 3,\ f^{(4)}(1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4,\ldots$$

$$\ldots,\ f^{(n)}(1)=(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=(-1)^n\cdot n!,\ldots\ .$$

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциясының $x=1$ аймағындағы Тейлор қатары мына түрде болады:

$$1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\ .$$

Алынған қатар еселігі $q=-(x-1)$ болатын геометриялық қатар:

$$|q|=|x-1|<1\Rightarrow -1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2\,.$$

Ендеше, қатар $x\in(0,2)$ аралығында абсолютті жинақты. Онда

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,\quad x\in(0,2)\,.$$

Мысал №10. Берілген функцияны Тейлор қатарына жікте: $f(x)=\dfrac{5-x}{12-x-x^2}$.

Шешуі. Берілген бөлшекті қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2}=\frac{5-x}{(x+4)(3-x)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{3-x};$$

$$5-x=A(3-x)+B(x+4).$$

Бұдан, $x=3$ және $x=-4$ дей отырып, $A=\dfrac{9}{7}$, $B=\dfrac{2}{7}$ екендігін аламыз.Ендеше,

$$\frac{5-x}{12-x-x^2}=\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3-x}. \qquad (8)$$

$a+a\cdot q+a\cdot q^2+\ldots=\dfrac{a}{1-q}$, $|q|<1$ формуласын қолданып, әрбір қарапайым бөлшектерді жеке-жеке қарастырамыз:

$$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4^2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{4^n}+\ldots\right),\quad \left|\frac{x}{4}\right|<1;$$

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right),\quad \left|\frac{x}{3}\right|<1.$$

Табылған жіктеуді (8)-ге қойсақ:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2}=\frac{9}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{9}{7}\cdot\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}+\frac{2}{7\cdot 3^{n+1}}\right]x^n,$$

және $\begin{cases}-4<x<4,\\-3<x<3,\end{cases}\Rightarrow x\in(-3{,}3)$ болады.

Сонымен, $\dfrac{5-x}{12-x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{9\cdot(-1)^n}{7\cdot 4^{n+1}}+\dfrac{2}{7\cdot 3^{n+1}}\right)\cdot x^n$, $x\in(-3{,}3)$.

Мысал №11. $f(x)=\sin^2 x$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $sin^2 x=\dfrac{1-cos\,2x}{2}$ екені бізге мектеп курсынан белгілі..

$\cos 2x$ функциясын 3 пункттегі формула бойынша жіктесек (x-ті $2x$-ке ауыстырсақ), онда:

$$sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

егер $x\in(-\infty,+\infty)$.

Мысал №12. $f(x)=ln\dfrac{2+x}{2-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі. $ln\dfrac{2+x}{2-x}=ln\dfrac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ қарастырамыз.

5 пункттегі жіктеуді қолдансақ, x-ті сәйкесінше $\dfrac{x}{2}$ және $(-\dfrac{x}{2})$-пен алмастырсақ:

$$ln\frac{2+x}{2-x}=\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\cdot 2}+\frac{x^3}{2^3\cdot 3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n\cdot n}+\ldots\right)-$$

$$-\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\cdot 2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 3}-\ldots-\frac{x^n}{2^n\cdot n}-\ldots\right)=x+\frac{x^3}{2^3\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}+\ldots$$

Алынған жіктеу дұрыс болады, егер $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$, яғни, $|x|<2$ болса.

Мысал №13. $f(x)=\sqrt{1-x}$ функциясын Тейлор қатарына жікте.

Шешуі: $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$

мұндағы $x\in(-1,1)$, жіктеуін қолданамыз. $m=\frac{1}{2}$ деп алып, x-ті $(-x)$-ке айырбастасақ, онда

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots.$$

Жіктеу дұрыс болады, егер $|-x|<1$, яғни, $|x|<1$.